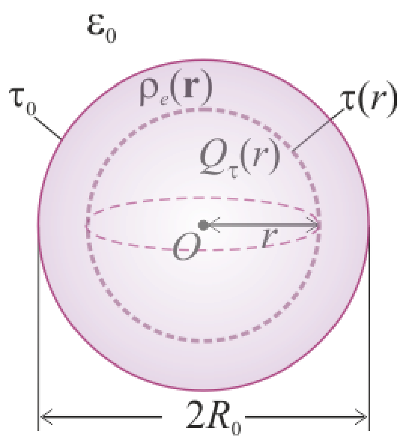
1 Enunciado



En una esfera τ_0 de radio R_0 y centro en O, existe una distribución no uniforme de carga eléctrica negativa descrita por una densidad volumétrica radial $\rho_e(r)$, respecto del punto O, de manera que r es la distancia desde dicho centro al punto P donde se mide la densidad de carga. Dicha distribución es tal que si consideramos una región esférica τ con centro en O y radio $r \leq R_0$, la cantidad parcial de carga contenida en τ es $Q_\tau = -Q_0\,(r/R_0)^2 = Q_\tau(r)$. No hay más cargas en el sistema.

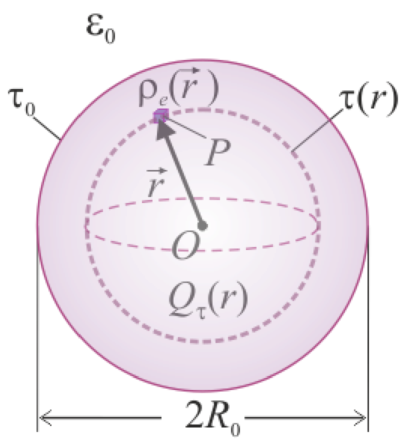
1. ¿Cómo es la componente radial del campo eléctrico $E(r)$ creado por la distribución descrita, tanto dentro como fuera de la esfera τ_0?
2. ¿Cómo es el potencial electrostático creado por la distribución en el exterior de τ_0? ¿Cuánto vale el potencial en el centro O?

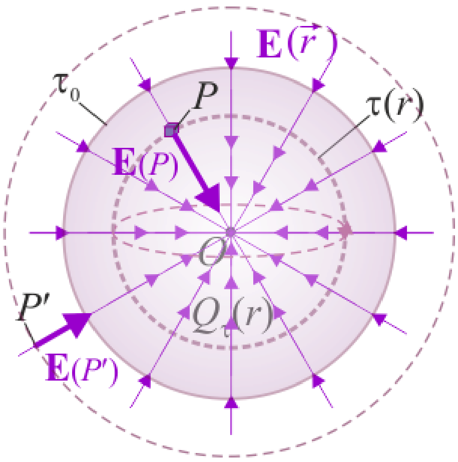
2 Solución

Planteamiento

Tomando un sistema de referencia con $OXYZ$ con origen en el centro O de la region esférica τ_0, la distribución de carga eléctrica existente en el sistema estará descrita por una función densidad volumétrica que indica la cantidad de carga que por unidad de volumen hay en cada punto del espacio. Si para cada punto P del espacio definimos el radiovector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ que determina la posición de dicho punto respecto del centro O, se tendrá:

$$\rho_e(\vec{r}) = \left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right]_P = \begin{cases} \rho_e(r), & 0 \leq r < R_0 \\ 0, & R_0 < r \end{cases}$$





con $r = |\vec{r}|$. La función $\rho_e(r)$ no está especificada, pero podría calcularse a partir del dato proporcionado en el enunciado de que la cantidad parcial de carga eléctrica que hay en una esfera τ contenida en τ_0, con centro en O y radio $r \leq R_0$, está descrita por la expresión:

$$Q_\tau(r) = -Q_0\,\left(\frac{r}{R_0}\right)^2$$

En consecuencia, la cantidad total de carga en τ_0 es $-Q_0$. En cualquier caso, aún desconociendo a priori la expresión de la función $\rho_e(r)$, el hecho de que sea sólo dependa de la distancia r al centro O (distribución radial), nos permite asegurar que el campo eléctrico creado por dicha distribución en cualquier punto P del espacio va a presentar simetría radial con respecto a dicho punto. Es decir,

$$\boxed{\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{u}_r(P);} \quad \text{con}\ \ \vec{u}_r(P) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$$

Es decir, el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio, P, sólo tiene componente radial (en la dirección del radiovector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$), que depende de la distancia r al centro O de la distribución, pero no de otras variables geométricas. Y en el caso de campos que presentan este tipo de simetría, la expresión de dicha componente radial, $E(r)$, puede obtenerse mediante la **aplicación** de la **Ley de Gauss para el campo eléctrico**.

Esta ley fundamental de la Teoría Electromagnética establece que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada $\partial\tau$, es proporcional a la cantidad total de carga eléctrica que hay en el volumen τ delimitado por aquélla. El valor de la constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades utilizado para medir las magnitudes físicas; en el Sistema Internacional de unidades esta constante es $4\pi\, k_e = 1/\varepsilon_0$, (inverso de la permitividad dieléctrica del vacío):

$$\Phi_e\big\rfloor_{\partial\tau} = \oint_{\partial\tau} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\, Q\big\rfloor_{\tau}$$

Por otra parte, la Ley de Gauss para el campo eléctrico expresa una relación cuantitativa entre dicha magnitud vectorial y sus fuentes escalares: es decir, las magnitudes escalares que producen campo eléctrico.

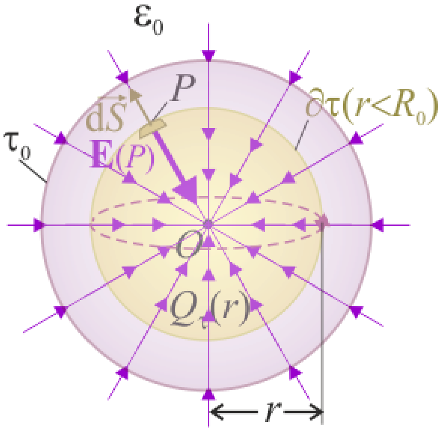
2.1 Cálculo de la componente radial del campo eléctrico

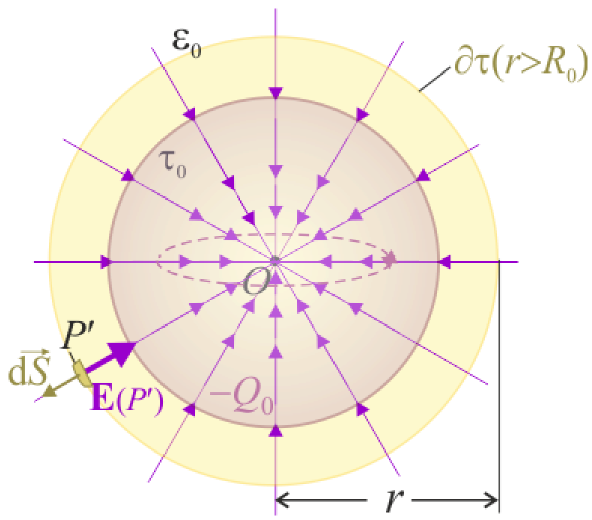
Para determinar la componenente del campo con simetría radial mediante la ley de Gauss, ésta ha de aplicarse en una superficie cerrada con idéntica simetría. En el caso que nos ocupa hemos de considerar una superfice esférica $\partial\tau(r)$ con centro en *O*. Es decir, concéntrica con la distribución de carga que genera el campo y, por tanto, con el propio campo.

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie se obtiene calculando la integral, extendida a toda la superficie, del producto del campo en cada punto *P* de $\mathrm{d}S$, multiplicado escalarmente por el vector elemento de superficie $\mathrm{d}\vec{S}$ en dicho punto. Como se sabe, este vector tiene módulo infinitesimal $\mathrm{d}S$ (área del entorno del punto), dirección perpendicular al plano tangente a la superficie en *P* y, por convenio, orientado hacia el exterior del volumen delimitado por la superficie $\partial\tau$. Y puesto que en una superfice esférica de centro *O*, el radio *OP* es perpendicular al plano tangente en *P* a la superficie $\partial\tau$, se tendrá que

$$P \in \partial\tau(r) \implies \mathrm{d}\vec{S}\big\rfloor_P = \mathrm{d}S\,\vec{u}_r(P)$$

donde r es el radio de la superficie esférica $\partial\tau$ y, por tanto, la distancia desde el centro *O* a todos y cada uno de los puntos de dicha superficie.





El vector unitario radial $\vec{u}_r(P)$ es exactamente el mismo tanto en la expresión del vector elemento de superficie como del campo (por estar evaluados ambos en el mismo punto *P* de la superficie).Por otra parte, puesto que la componente radial *E*(*r*) sólo depende la distancia al centro *O*, dicha componente tendrá igual valor en todos los puntos de $\partial\tau$. Por tanto, se obtiene...

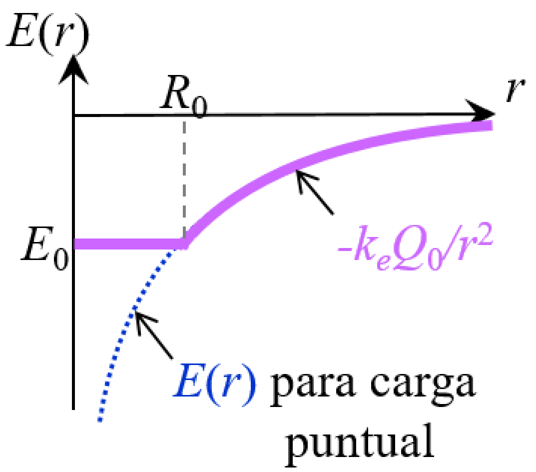
$$\forall P \in \partial\tau(r)\,,\quad \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\big\rfloor_P = \left[E(r)\vec{u}_r(P)\right]\cdot\left[\mathrm{d}S\vec{u}_r(P)\right] = E(r)\mathrm{d}S \implies \Phi_e\big\rfloor_{\partial\tau} = \oint_{\partial\tau}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E(r)\oint_{\partial\tau}\mathrm{d}S = E(r)\,4\pi r^2$$

Este resultado es válido independientemente de que r sea mayor o menor que R_0 (radio de la distribución de carga). Sin embargo, la cantidad de carga contenida dentro de la superficie esférica $\partial\tau(r)$, sí va a depender del valor del radio de esta. Si el radio es menor que el de la distribución de carga eléctrica, la cantida de carga contenida es proporcional al cuadrado del radio, tal como se incida en el enunciado. Si el radio de la supeficie gaussiana cerrada $\partial\tau(r)$ es mayor o igual que el de τ_0, la cantidad de carga contenida será $-Q_0$:

$$Q\rfloor_\tau = \begin{cases} Q_\tau(r) = -Q_0\,\dfrac{r^2}{R_0^2}\,; & \text{si } r < R_0 \quad (\tau \subset \tau_0) \\ \\ -Q_0\,; & \text{si } R_0 \leq r \quad (\tau_0 \subset \tau) \end{cases}$$

Aplicando ahora la ley de Gauss, se obtiene…

$$\Phi_e\rfloor_{\partial\tau} = \left.\frac{Q}{\varepsilon_0}\right\rfloor_\tau \implies 4\pi\,r^2\,E(r) = \begin{cases} -\dfrac{Q_0\,r^2}{\varepsilon_0\,R_0^2}\,; & \text{si } r < R_0 \\ \\ -\dfrac{Q_0}{\varepsilon_0}\,; & \text{si } R_0 \leq r \end{cases} \implies \boxed{E(r) = \begin{cases} -\dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0\,R_0^2}\,; & \text{si } r < R_0 \\ \\ -\dfrac{Q_0}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,; & \text{si } R_0 \leq r \end{cases}}$$



Por tanto, la distribución de carga en τ_0 genera un campo eléctrico radial en todo el espacio, expresado por la siguiente función de campo:

$$\boxed{\vec{E}(P) = \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -k_e\,\dfrac{Q_0}{R_0^2}\,\vec{u}_r(P) = \vec{E}_{\text{int}}(\vec{r})\,; & \text{si } r < R_0 \\ \\ -k_e\,\dfrac{Q_0}{r^2}\,\vec{u}_r(P) = \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})\,; & \text{si } R_0 \leq r \end{cases}} \quad \text{con } \vec{u}_r(P) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$$

Es decir, en los puntos interiores a la distribución la intensidad del campo **es constante**; mientras que en los puntos exteriores el campo es **idéntico al de una carga puntual** $-Q_0$ localizada en el centro O de τ_0.

2.2 Potencial electrostático

Este resultado nos permite identificar de forma inmediata cómo va a ser el campo potencial electrostático $V(\vec{r})$ en puntos exteriores a la distribución. Puesto que dicho potencial está relacionado directamente con el campo eléctrico por las relaciones,

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + C \longleftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

si el campo eléctrico en puntos exteriores a τ_0 es el mismo al de una carga puntual situada en O, en esa región el potencial electrostático debe ser también el correspondiente a dicha distribución simple de carga… salvo una constante C cuyo valor puede fijarse arbitrariamente:

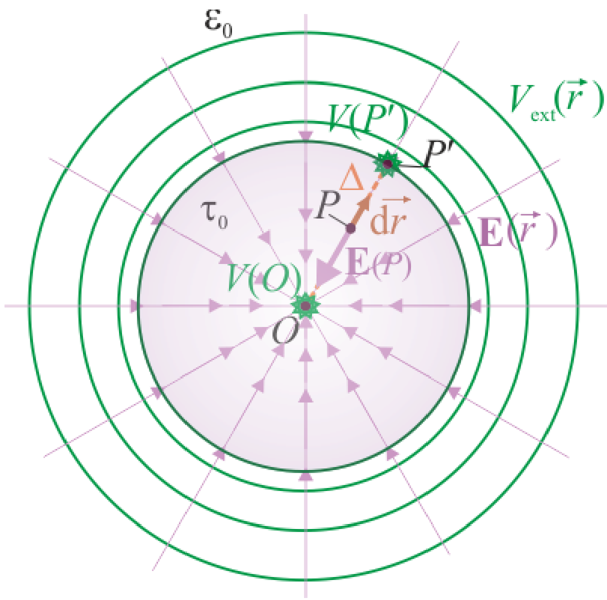
$$\forall\, P \notin \tau_0, \quad V(P) = -k_e\,\frac{Q_0}{r} + C = V_{\text{ext}}(r)\,; \quad \text{con } r = |\overrightarrow{OP}| \geq R_0$$

El dominio de definición de esta función se extiende hasta puntos infitamente alejados de la distribución de carga. Asumiendo ésta no va producir efectos apreciables en dichos puntos y que, por tanto, el potencial se anula allí, se tendrá que...

$$\lim_{r\to\infty} V_{\text{ext}}(r) = C = 0 \implies \boxed{\forall\, P \notin \tau_0, \quad V(P) = V_{\text{ext}}(r) = -k_e\, \frac{Q_0}{r}\,; \quad \text{con} \;\; r = |\overrightarrow{OP}| \geq R_0}$$

Valor del potencial en el centro de la distribución

La expresión anterior permite determinar también el valor del potencial en cualquier punto P' de la superficie $\partial\tau_0$ de la esfera cargada:



$$\forall\, P' \in \partial\tau_0, \text{ tal que } \;\; r = R_0 \implies V(P') = V_{\text{ext}}(R_0) = -k_e\, \frac{Q_0}{R_0}$$

Entonces, el valor del potencial en el centro O puede ser calculado sin más que aplicar la definición de diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V(O) - V(P') = \int_O^{P'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Como se sabe, si el campo eléctrico es producido exclusivamente por cargas electrostáticas, el valor de la circulación del campo eléctrico que aparece en la expresión anterior es idependiente del camino seguido. Elijamos, por tanto, un camino que nos permita el cálculo sencillo de dicha integral: el radio Δ que va desde el centro O al punto P' de la superficie $\partial\tau_0$. En ese caso, el campo eléctrico ha de ser evaluado siempre en puntos interiores de τ_0, donde comprobamos que existía un campo radial pero de igual módulo en todos ellos, $\vec{E}_{\text{int}}(\vec{r})$. Además, a lo largo de esta trayectoria, el vector diferencial de camino $\mathrm{d}\vec{r}$ sólo tiene componente radial (es decir, es paralelo al campo eléctrico en cada punto de la misma), y su modulo va a ser una variación infinitesimal de la distancia al centro O:

$$V(O) = V(P') + \int_{O\ (\Delta)}^{P'} \vec{E}_{\text{int}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,; \quad \text{con} \;\; \mathrm{d}\vec{r}\big]_{\Delta} = \mathrm{d}r\, \vec{u}_r(P)\,, \quad \forall\, P \in \Delta$$

En consecuencia...

$$\vec{E}_{\text{int}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\big]_{P\in\Delta} = -k_e\, \frac{Q_0}{R_0^2}\, \mathrm{d}r \implies \boxed{V(O) = \underbrace{-k_e\, \frac{Q_0}{R_0}}_{V(P')} - k_e\, \frac{Q_0}{R_0^2} \int_0^{R_0} \mathrm{d}r = -2\, k_e\, \frac{Q_0}{R_0}}$$